EXPOSITION DE QUELQUES PARADOXES
DANS LE CALCUL INTÉGRAL

PAR M. EULER.

Premier Paradoxe.

I.

Je me propoſe ici de déveloper un paradoxe dans le calcul intégral, qui paroitra bien étrange : c'eſt qu'on parvient quelquefois à des équations différentielles, dont il paroit fort difficile de trouver les intégrales par les régles du calcul intégral, & qu'il eſt pourtant aiſé de trouver, non par le moyen de l'intégration, mais plutôt en différentiant encore l'équation propoſée ; de ſorte qu'une différentiation réitérée nous conduiſe dans ces cas à l'intégrale cherchée. C'eſt ſans doute un accident fort ſurprenant, que la différentiation nous puiſſe mener au même but, auquel on eſt accoutumé de parvenir par l'intégration qui eſt une opération entierement oppoſée.

II. Pour mieux faire ſentir l'importance de ce paradoxe, on n'a qu'à ſe ſouvenir, que le calcul intégral renferme la méthode naturelle de trouver les intégrales des quantités différentielles quelconques : & de là il ſemble qu'une équation différentielle étant propoſée, il n'y a d'autre moyen pour arriver à ſon intégrale, que d'en entreprendre l'intégration. Et ſi l'on vouloit, au lieu d'intégrer cette équation, la différentier encore une fois, on devroit croire qu'on s'éloigneroit encore davantage du but propoſé ; attendu qu'on auroit alors une équation différentielle du ſecond degré, qu'il faudroit même deux fois intégrer, avant qu'on parvint au but propoſé.

III.

III. Il doit donc être très ſurprenant, qu'une différentiation réiterée ne nous éloigne non ſeulement davantage de l'intégrale, que nous nous propoſons de chercher, mais qu'elle nous puiſſe même fournir cette intégrale. Ce ſeroit ſans doute un grand avantage, ſi cet accident étoit général, & qu'il eut lieu toujours, puisqu'alors la recherche des intégrales, qui eſt ſouvent même impoſſible, n'auroit plus la moindre difficulté : mais il ne ſe trouve qu'en quelques cas très particuliers dont je rapporterai quelques exemples : les autres cas demandent toujours la méthode ordinaire d'intégration. Voilà donc quelques problèmes qui ſerviront à éclaircir ce paradoxe.

PROBLEME I.

Le point A *étant donné, trouver la courbe* EM *telle, que la perpendiculaire* AV *tirée du point* A *ſur une tangente quelconque de la courbe* MV, *ſoit partout de la même grandeur.* Fig. 1.

IV. Prenant pour axe une droite quelconque AP, tirée du point donné A, qu'on y tire d'un point quelconque de la courbe cherchée M la perpendiculaire MP, & une autre infiniment proche mp : & qu'on nomme $AP = x$, $PM = y$, & la longueur donnée de la ligne $AV = a$. Soit de plus l'élément de la courbe $Mm = ds$, & ayant tiré $M\pi$ parallele à l'axe AP, on aura $Pp = M\pi = dx$ & $\pi m = dy$; donc $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Qu'on baiſſe du point P auſſi ſur la tangente MV la perpendiculaire PS, & ſur celle-cy du point A la perpendiculaire AR, qui ſera parallele à la tangente MV. Maintenant, puisque les triangles PMS & APR ſont ſemblables au triangle $Mm\pi$, on en tirera : $PS = \frac{M\pi \,.\, PM}{Mm} = \frac{y\,dx}{ds}$ & $PR = \frac{m\pi \,.\, AP}{Mm} = \frac{x\,dy}{ds}$: d'où, à cauſe de $AV = PS - PR$, nous aurons cette équation, $a = \frac{y\,dx - x\,dy}{ds}$ ou $ydx - xdy = ads$

$= a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, qui exprimera la nature de la courbe cherchée.

V. Voila donc une équation différentielle pour la courbe que nous cherchons : & si nous la voulons traiter selon la méthode ordinaire, il faut d'abord débarrasser les différentiels du signe radical : prenant donc les quarrés, nous aurons :

$$yydx^2 - 2xydxdy + xxdy^2 = aadx^2 + aady^2$$

& partant :

$$dy^2 = -\frac{2xydxdy - aadx^2 + yydx^2}{aa - xx}$$

dont l'extraction de racine fournit

$$dy = -\frac{xydx + adx\sqrt{(xx + yy - aa)}}{aa - xx}.$$

ou $aady - xxdy + xydx = adx\sqrt{(xx + yy - aa)}$ dont il faut maintenant chercher l'intégrale pour connoitre la courbe en question.

VI. Pour intégrer cette équation, posons $y = u\sqrt{(aa - xx)}$, pour avoir $\sqrt{(xx + yy - aa)} = \sqrt{(aa - xx)(uu - 1)}$, & $dy = du\sqrt{(aa - xx)} - \frac{uxdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, donc $aady - xxdy = du(aa - xx)^{\frac{3}{2}} - uxdx\sqrt{(aa - xx)}$. Ces valeurs étant substituées donnent :

$$du(aa - xx)^{\frac{3}{2}} = adx\sqrt{(aa - xx)(uu - 1)}$$

ou bien $$\frac{du}{\sqrt{(uu - 1)}} = \frac{adx}{aa - xx},$$

équation où les variables x & u se trouvent separées.

VII.

VII. Puisque cette équation est séparée, je remarque d'abord, que les conditions, qu'elle renferme, sont remplies, si l'on met $V(uu - 1) = 0$, ou $uu = 1$; car dans ce cas tant le membre $adx\, V(aa - xx)(uu - 1)$ devient évanouïssant, que l'autre membre $du\,(aa - xx)^{\frac{3}{2}}$ à cause de $du = 0$. Et partant nous avons déjà une valeur intégrale $uu = 1$, ou $u = \pm 1$, d'où nous tirons $y = \pm V(aa - xx)$, ou $yy + xx = aa$; ce qui est l'équation pour un cercle, décrit du centre A avec le rayon $= a$. Or il est clair que ce cercle satisfait au problème, puisque la perpendiculaire A V devient égale au rayon du cercle, & tombe sur le point d'attouchement M; comme il est connu par les proprietés du cercle.

VIII. Mais ce cas n'épuise pas encore l'équation différentielle $\frac{du}{V(uu - 1)} = \frac{a\,dx}{aa - xx}$; cherchons donc son intégrale qui sera par les logarithmes

$$l\,[u + V(uu - 1)] = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{nn(a + x)}{a - x}$$

de sorte que nous ayons:

$$u + V(uu - 1) = n\, V\frac{a + x}{a - x}.$$

De là nous trouverons,

$$-1 = nn.\, \frac{a + x}{a - x} - 2nu\, V\frac{a + x}{a - x}$$

& partant $u = \frac{n}{2}\, V\frac{a + x}{a - x} + \frac{1}{2n}\, V\frac{a - x}{a + x}$.

Par conséquent $y = uV(aa - xx) = \frac{n}{2}(a + x) + \frac{1}{2n}(a - x)$.

équation pour une ligne droite tirée en sorte, que la perpendiculaire qu'on tire sur elle du point donné A soit $= a$.

IX.

XI. Voilà donc la solution du problème proposé, qu'on trouveroit par la methode ordinaire, où il faut premièrement séparer les variables, & ensuite intégrer l'équation différentielle séparée. Or il est clair, que cette opération est non seulement assez embarrassante, mais elle deviendroit même impossible, si au lieu de la formule irrationelle $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, on en avoit une plus compliquée. Comme si l'on ètoit parvenu à cette équation

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt[3]{(dx^3 + dy^3)}$$

en prenant des cubes, on auroit bien de la peine à extraire ensuite la racine pour trouver le rapport entre les différentiels dx & dy. Et si la racine, étoit plus haute, cette extraction deviendroit même impossible.

X. Or maintenant je dis, que cette même équation, qui renferme la solution du problême

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

se peut réduire à une équation finie, & même algébrique, entre x & y, sans y employer la voye ordinaire d'intégration: mais, en quoi consiste la force du paradoxe, par une différentiation ultérieure de cette équation. Ou ce sera cette même différentiation, qui nous conduira à l'équation intégrale, qui nous fera connoitre la nature de la courbe cherchée. Ce que je viens d'avancer, mettra dans tout son jour la force du paradoxe, que je me suis proposé de démêler ici.

XI. Afin que les différentiels ne nous causent aucun embarras, en passant à une différentiation ultérieure, supposons $dy = p\,dx$, & nous aurons $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + pp)}$. Par cette substitution notre équation, étant divisée par dx, prendra cette forme,

$$y - px = a\sqrt{(1 + pp)} \quad \text{ou} \quad y = px + a\sqrt{(1 + pp)}$$

où il faut bien remarqner, que quoiqu'on n'y apperçoive plus de différentiels, cette équation ne laisse pas d'être différentielle, à cause de la

la lettre p, dont la valeur eſt $\frac{dy}{dx}$; de ſorte que, ſi l'on la remettoit, on reviendroit à la premiere équation différentielle.

XII. A préſent, au lieu d'intégrer cette équation différentielle, je la différentie encore une fois pour avoir,

$$dy = p\,dx + x\,dp + \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Or, ayant ſuppoſé $dy = p\,dx$, cette valeur miſe à la place de dy nous donne d'abord :

$$0 = x\,dp + \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

d'où en diviſant par dp nous tirons d'abord :

$$x = -\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$$

& puisqu'il y a $y = px + a\sqrt{(1+pp)}$, en y ſubſtituant cette valeur de $x = -\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, nous aurons :

$$y = -\frac{app}{\sqrt{(1+pp)}} + a\sqrt{(1+pp)} \text{ ou } y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

XIII. Voilà donc des valeurs, & mêmes algébriques, pour les deux coordonnées x & y, lesquelles ne renferment que la ſeule variable p : & comme à préſent il n'eſt plus queſtion de la valeur ſuppoſée de $p = \frac{dy}{dx}$, le problème eſt reſolu par cette différentiation réitérée. Car on n'a qu'à éliminer la variable p, de ces deux équations

$$x = -\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} \quad \& \quad y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$$

ce

ce qui ſe fera aiſément, en ajoutant enſemble les quarrés xx & yy, d'où l'on aura d'abord

$$xx + yy = \frac{aapp + aa}{1 + pp} = aa$$

qui eſt l'équation pour le cercle, qui ſatisfait au problème propoſé.

XIV. Il eſt bien vray, qu'outre le cercle il y a encore une infinité de lignes droites, qui ſatisfont également à la queſtion, & que cette méthode ne ſemble pas fournir. Mais elle les contient néanmoins, & encore plus viſiblement, que l'autre méthode ordinaire. On n'a qu'à regarder l'équation $0 = xdp + \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, à laquelle la différentiation nous a conduit, & qui, puisqu'elle eſt diviſible par dp, renferme auſſi la ſolution $dp = 0$. Or de là nous tirons immédiatement $p = \text{Conſt} = n$, & partant $y = nx + a\sqrt{(1+nn)}$; où toutes les lignes droites, qui rempliſſent les conditions du problème, ſont compriſes.

XV. Ayant déjà remarqué que cette équation:

$$ydx - xdy = a\sqrt[3]{(dx^3 + dy^3)}$$

ne ſauroit à peine être réſoluë par la méthode ordinaire, celle-ci nous fournira d'abord par la différentiation ſon intégrale. Car, poſant $dy = pdx$, nous aurons $\sqrt[3]{(dx^3 + dy^3)} = dx\sqrt[3]{(1+p^3)}$, & partant

$$y - px = a\sqrt[3]{(1+p^3)} \text{ ou } y = px + a\sqrt[3]{(1+p^3)}$$

qui étant différentiée donne

$$dy = pdx = pdx + xdp + \frac{appdp}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}$$

d'où nous tirons $0 = xdp + \frac{appdp}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}$, ou

$$x = \frac{-app}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}} \quad \& \ y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}$$

XVI.

XVI. Si l'on veut ici éliminer p, on n'a qu'à ajouter les cubes pour avoir $y^3 + x^3 = \frac{a^3(1-p^6)}{(1+p^3)^2} = \frac{a^3(1-p^3)}{1+p^3} = -a^3 + \frac{2a^3}{1+p^3}$ de forte que $\frac{1}{1+p^3} = \frac{a^3+x^3+y^3}{2a^3}$, & partant

$$y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}} = (a^3+x^3+y^3)^{\frac{2}{3}} : a\sqrt[3]{4}$$

Donc $$4a^3y^3 = (a^3+x^3+y^3)^2$$

ou $$0 = a^6 + 2a^3x^3 - 2a^3y^3 + x^6 + 2x^3y^3 + y^6$$

pour une ligne du fixième ordre. Mais outre celle-ci fatisfait encore $dp = 0$, ou $p = n$, à caufe de la divifion faite par dp ; & ce cas donne une infinité de lignes droites contenues dans cette équation

$$y = nx + a\sqrt[3]{(1+n^3)}.$$

XVII. On voit que par la même méthode on réfoudra aifément tous les problemes, qui conduiroient à de telles équations :

$$ydx - xdy = a\sqrt[n]{(\alpha dx^n + \beta dx^{n-\nu}dy^\nu + \gamma dx^{n-\mu}dy^\mu \text{ \&c.})}$$

Car, pofant $dy = pdx$, on auroit

$$y = px + a\sqrt[n]{(\alpha + \beta p^r + \gamma p^\mu + \text{\&c.})}$$

& différentiant & divifant par dp,

$$x = \frac{-\nu ab p^{\nu-1} - \mu a\gamma p^{\mu-1} - \text{\&c.}}{n\sqrt[n]{(\alpha + \beta p^\nu + \gamma p^\mu + \text{\&c.})^{n-1}}}$$

$$\& \; y = \frac{na\alpha + (n-\nu)a\beta p^\nu + (n-\mu)a\gamma p^\mu + \text{\&c.}}{n\sqrt[n]{(\alpha + \beta p^\nu + \gamma p^\mu + \text{\&c.})^{n-1}}}$$

 D'où

D'où, en éliminant p, on tirera une équation algébrique entre x & y. Or, puisqu'il y a aussi $dp = 0$, & $p =$ Const : $= m$, les lignes droites renfermées dans cette formule :

$$y = mx + a\sqrt[n]{(\alpha + \beta m^{\nu} + \gamma m^{\mu} + \&c.)}$$

satisferont également. Je passe donc à un autre problème.

PROBLEME II.

Fig. 2. *Sur l'axe* AB *trouver la courbe* AMB *telle, qu'ayant tiré de son point quelconque* M *la tangente* TMV, *elle coupe en sorte les deux droites* AE & BF, *tirées perpendiculairement sur l'axe* AB, *en deux points donnés* A & B, *que le rectangle formé par les lignes* AT & BV *soit partout de la même grandeur.*

XVIII. Soit l'intervalle donné $AB = 2a$, l'abscisse $AB = x$, l'appliquée $PM = y$, & ayant tiré l'infiniment proche pm, on aura $Pp = M\pi = dx$, & $\pi m = dy$. Qu'on tire les droites MR & MS paralleles à l'axe AB, & la ressemblance des triangles $M\pi m$, TRM & MSV, à cause de $PB = MS = 2a - x$, fournira :

$$PM = \frac{x\,dy}{dx} \quad \& \quad SV = \frac{(2a - x)\,dy}{dx}$$

D'où nous aurons :

$$AT = y - \frac{x\,dy}{dx} \quad \& \quad BV = y + \frac{(2a - x)\,dy}{dx}$$

dont le produit devant être constant $= cc$ fournira cette égalité :

$$\left(y - \frac{x\,dy}{dx}\right)\left(y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{2a\,dy}{dx}\right) = cc$$

XIX. Si l'on vouloit traiter cette équation par la méthode ordinaire, on rencontreroit bien des difficultés, & peut être n'arriveroit-on

on qu'après bien des détours à l'équation intégrale. Mais, pour nous servir de l'autre méthode, posons $dy = pdx$, pour avoir

$$(y - px)(y - px + 2ap) = cc$$

ou bien : $yy + 2(a - x)py - 2appx + ppxx = cc$

ou $yy + 2(a - x)py + (a - x)^2 pp = cc + aapp$

d'où l'extraction de racine fournit :

$$y + (a - x)p = \sqrt{(cc + aapp)}$$

ou $y = -(a - x)p + \sqrt{(cc + aapp)}$

XX. Différentions maintenant cette équation, au lieu d'en chercher l'intègrale, & nous obtiendrons :

$$dy = pdx = -(a - x)dp + pdx + \frac{aapdp}{\sqrt{(cc + aapp)}}$$

où les termes pdx se détruisant ensemble, la division par dp donnera :

$$a - x = \frac{aap}{\sqrt{(cc + aapp)}} \quad \text{ou} \quad x = a - \frac{aap}{\sqrt{(cc + aapp)}}$$

& substituant cette valeur de $a - x$ dans celle de y, on aura

$$y = \frac{-aapp}{\sqrt{(cc + aapp)}} + \sqrt{(cc + aapp)} \text{ ou } y = \frac{cc}{\sqrt{(cc + aapp)}}$$

XXI. Ayant donc :

$$\frac{a - x}{a} = \frac{ap}{\sqrt{(cc + aapp)}} \quad \& \quad \frac{y}{c} = \frac{c}{\sqrt{(cc + aapp)}}$$

l'elimination de la quantité p se fera en ajoutant les quarrés de ces deux formules, ce qui donnera :

$$\frac{(a - x)^2}{aa} + \frac{yy}{cc} = \frac{aapp + cc}{cc + aapp} = 1,$$

donc : $\frac{yy}{cc} = \frac{2ax - xx}{aa}$ ou $y = \frac{c}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$

 D'où

D'où nous voyons que la courbe cherchée eſt une ellipſe décrite ſur l'axe AB, & dont le demi-axe conjugué eſt $= c$, de ſorte que dans une telle ellipſe le rectangle des tangentes AT & BV ſoit toujours égal au quarré du demi-axe conjugué.

XXII. Mais il eſt clair qu'outre cette ligne courbe il ſatisfait encore au probleme une infinité de lignes droites TV tellement tirées, que le rectangle AT. BV ſoit $= cc$. Ces lignes droites ſe trouveront par le diviſeur dp, qui étant poſé $= 0$, donne $p =$ Conſt: $= n$, D'où nous aurons : $y = - n(a - x) + V(cc + nnaa)$. D'où, ſi $x = 0$, nous tirons $AT = - na + V(cc + nnaa)$, & ſi $x = 2a$, $BV = na + V(cc + nnaa)$, de ſorte qu'on ait toujours

$$AT.\ BV = cc$$

quelque valeur que puiſſe avoir le nombre n.

PROBLEME III.

Fig. 3. *Deux points étant donnés* A & C, *trouver la ligne courbe* EM *telle, que ſi l'on tire une tangente quelconque* MV, *qu'on y mene du premier point* A *la perpendiculaire* AV, & *qu'on joigne de l'autre point* C *à* V *la droite* CV, *cette droite* CV *ſoit partout de la même grandeur.*

XXIII. Poſons la diſtance donnée $AC = b$, & prenant cette ligne pour axe, qu'on y mene du point M l'appliquée MP, & ſon infiniment proche pm. Soit $AP = x$, & $PM = y$; & à cauſe de $Pp = M\pi = dx$, & $\pi m = dy$, ſoit $Mm = V(dx^2 + dy^2) = ds$. Cela poſé, nous avons vû dans la ſolution du premier problême qu'on aura : $AV = \frac{ydx - xdy}{ds}$. Baiſſons auſſi du point V ſur l'axe a perpendiculaire VX, & à cauſe des triangles ſemblables $Mm\pi$ l& VAX, nous aurons :

VX

$$VX = \frac{dx(ydx - xdy)}{ds^2} \quad \& \quad AX = \frac{dy(ydx - xdy)}{ds^2}$$

& partant : $CX = b + \frac{dy(ydx - xdy)}{ds^2}$.

XXIV. Soit maintenant la longueur donnée $CV = a$, & à cauſe de $CV^2 = CX^2 + XV^2$ nous aurons :

$$aa = bb + \frac{2bdy(ydx - xdy)}{ds^2} + \frac{(ydx - xdy)^2}{ds^2}$$

à cauſe de $dx^2 + dy^3 = ds^2$: & de plus :

$$\frac{(ydx-xdy)^2}{ds^2} + \frac{2bdy(ydx-xdy)}{ds^2} + \frac{bbdy^2}{ds^2} = aa - bb + \frac{bbdy^2}{ds^2} = aa - \frac{bbdx^2}{ds^2}$$

dont la racine quarrée eſt

$$\frac{ydx - xdy}{ds} + \frac{bdy}{ds} = V\left(aa - \frac{bbdx^2}{ds^2}\right)$$

ou bien en multipliant par ds

$$ydx - xdy + bdy = V(aads^2 - bbdx^2)$$

XXV. Ici il eſt auſſi évident, qu'on ſe plongeroit dans un calcul fort ennuyant, ſi l'on vouloit entreprendre la réſolution de cette équation par la méthode ordinaire. Je poſe donc $dy = pdx$, & à cauſe de $ds^2 = dx^2(1 + pp)$ notre équation différentielle prendra cette forme

$$y - px + bp = V(aa(1 + pp) - bb)$$

que je différentie encore, & poſant pdx pour dy, j'aurai :

$$pdx - pdx - xdp + bdp = \frac{aapdp}{V(aa(1 + pp) - bb)}$$

qui étant diviſée par dp donne :

$$b - x = \frac{aap}{V(aa(1 + pp) - bb)} \text{ ou } x = b - \frac{aap}{V(aa(1 + pp) - bb)}$$

&

& $y = -(b-x)p + V(aa(1+pp)-bb) = \frac{aa-bb}{V(aa(1+pp)-bb)}$

XXVI. De là, pour éliminer p, je forme ces équations:

$$\frac{b-x}{a} = \frac{ap}{V(aa(1+pp)-bb)} \; \& \; \frac{y}{V(aa-bb)} = \frac{V(aa-bb)}{V(aa(1+pp)-bb)}$$

& ajoutant les quarrés de ces formules, je trouve:

$$\frac{(b-x)^2}{aa} + \frac{yy}{aa-bb} = \frac{aa(1+pp)-bb}{aa(1+pp)-bb} = 1$$

qui eſt l'équation pour une ellipſe, dont le centre eſt en D, un des foyers en A, & le demi grand axe $=$ CV. Mais outre cette ellipſe le diviſeur $dp = 0$, donne encore une infinité de lignes droites, compriſes dans cette équation

$$y = -n(b-x) + V(aa(1+nn)-bb)$$

PROBLEME IV.

Fig. 5. *Deux points étant* A & B, *trouver la courbe* EM *telle, qu'ayant tiré une tangente quelconque* VMX, *ſi l'on y mene des points* A & B *les perpendiculaires* AV & BX, *le rectangle de ces lignes* AV. BX *ſoit partout de la même grandeur.*

XXVII. Soit la diſtance des points données AB $= 2b$, qu'on y tire la perpendiculaire MP, & l'infiniment proche mp: & qu'on nomme les coordonnées: AP $= x$, PM $= y$, pour avoir Pp $=$ Mπ $= dx$, $\pi m = dy$ & Mm $= V(dx^2 + dy^2) = ds$. Cela poſé, nous avons vu, qu'on aura AV $= \frac{ydx - xdy}{ds}$. Qu'on tire de plus AR, perpendiculaire ſur BX, & la reſſemblance des triangles M$m\pi$ & ABR, fournira BR $= \frac{2bdy}{ds}$, & en y ajou-

tant

tant $RX = AV = \frac{ydx - xdy}{ds}$ nous aurons $BX = \frac{ydx + (2b - x)dy}{ds}$. Soit donc cc le rectangle des lignes AV & BX, & on aura pour la courbe EM cette équation :

$$(ydx - xdy)(ydx - xdy + 2bdy) = ccds^2$$

XXVIII. Sans nous embarrasser de la méthode ordinaire, posons $dy = pdx$, de sorte que $ds^2 = dx^2(1 + pp)$, & nous aurons :

$$(y - px)(y - px + 2bp) = cc(1 + pp)$$

qui se réduit à :

$$yy + 2(b - x)py - 2bppx + ppxx = cc(1 + pp)$$

ou à $yy + 2(b - x)py + (b - x)^2 pp = cc(1 + pp) + bbpp$ dont la racine quarrée est ;

$$y + (b - x)p = V(cc + (bb + cc)pp)$$

& partant $y = -(b - x)p + V(cc + (bb + cc)pp)$

XXIX. Différentions encore cette équation différentielle, & à cause de $dy = pdx$ nous aurons :

$$pdx = -(b - x)dp + pdx + \frac{(bb + cc)pdp}{V(cc + (bb + cc)pp)}$$

qui étant divisée par dp donne d'abord :

$$b - x = \frac{(bb + cc)p}{V(cc + (bb + cc)pp)}$$

ou bien $b - x = \frac{aap}{V(cc + aapp)}$ posant pour abréger $bb + cc = aa$. De là nous tirerons :

$$y = -(b - x)p + V(cc + aapp) = \frac{cc}{V(cc + aapp)}$$

Donc ayant :

$$\frac{b - x}{a} = \frac{ap}{V(cc + aapp)} \quad \& \quad \frac{y}{c} = \frac{c}{V(cc + aapp)}$$

nous aurons en ajoutant les quarrés

$$\frac{(b-x)^2}{aa} + \frac{yy}{cc} = 1$$

XXX. Cette équation eſt, comme il eſt évident, pour une ellipſe, dont les foyers ſont dans les points A & B ; & partant le centre au point du milieu C. Le demi petit axe ſera donc $= c$; & c'eſt au quarré duquel, que ſera partout égal le rectangle AV. BX: ce qui eſt auſſi une propriété connue de l'ellipſe. Or il y a auſſi des lignes droites, qui ſatisfont au même probleme, que le diviſeur $dp = 0$ nous fournira, car poſant $p = n$, l'équation pour toutes ces lignes droites ſera $y = -n(b-x) + \sqrt{(cc + nnaa)}$
Je pourrois encore ajouter un grand nombre de problemes ſemblables, pour confirmer ce paradoxe, mais ces quatre ſeront entierement ſuffiſans pour en prouver la vérité.

Second Paradoxe.

XXXI.

Le ſecond paradoxe, que je m'en vai étaler, n'eſt pas moins ſurprenant, puiſqu'il eſt auſſi contraire aux idées communes du calcul intégral. On s'imagine ordinairement, qu'ayant une équation différentielle quelconque, on n'ait qu'à chercher ſon intégrale, & à lui rendre toute ſon étendue en y ajoutant une conſtante indéfinie, pour avoir tous les cas, qui ſont compris dans l'équation différentielle. Ou bien, lorsque cette équation différentielle eſt le réſultat d'une ſolution d'un problème, on ne doute pas que l'équation intégrale, qu'on en trouve par les régles ordinaires, ne renferme toutes les ſolutions poſſibles du problème : cela s'entend, lorsqu'on n'aura pas négligé l'addition de conſtante, que toute intégration exige.

XXXII. Cependant il y a des cas, où l'intégration ordinaire nous conduit à une équation finie, qui ne renferme pas tout ce qui étoit

étoit contenu dans l'équation différentielle proposée ; quand même on ne néglige pas la constante mentionnée. Cela doit paroitre d'autant plus paradoxe, plus on est accoutumé d'être convaincu de la justesse de l'idée expliquée dans l'article précédent. Car si l'équation intégrale, qu'on aura trouvée après toutes les précautions prescrites, n'épuise pas l'étendue de l'équation différentielle ; le problème admettra des solutions, que l'intégration ne fournira point, & partant on arrivera à une solution défectueuse, ce qui semble sans doute renverser les principes ordinaires du calcul intégral.

XXXIII. Or il est fort aisé de proposer une infinité d'équations différentielles, auxquelles répond un certain rapport entre les quantités variables, qu'il est impossible de trouver par la voye d'intégration ordinaire. Soit, par exemple, proposée cette équation différentielle :

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{(xx + yy - aa)}$$

& il est évident que l'équation finie $xx + yy - aa = 0$, lui satisfait entierement. Car ayant de là $x\,dx + y\,dy = 0$, l'un & l'autre membre de l'équation différentielle évanouit de soi-même : ce qui est une marque indubitable, que cette équation finie $xx + yy = aa$ est contenue dans l'équation différentielle proposée : ou que le cercle résout les problèmes, qui conduisent à cette équation différentielle.

XXXIV. Cependant, quand nous intégrons cette équation différentielle, nous ne trouverons nullement ce rapport $xx + yy = aa$: car, divisant notre équation par $\sqrt{(xx + yy - aa)}$, que nous ayons :

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(xx + yy - aa)}} = dy$$

l'intégrale est evidente, & même dans toute son étendue

$$\sqrt{(xx + yy - aa)} = y + c$$

ayant introduit la constante indéfinie c. Or il est clair que l'équation déjà trouvée $yy + xx = aa$ n'est pas absolument renfermée

 dans

dans cette équation intégrale, quelque valeur qu'on donne à la constante c.

XXXV. Prenant les quarrés de notre équation intégrale trouvée, on aura :

$$xx - aa = 2cy + cc \quad \& \quad y = \frac{xx - aa - cc}{2c}$$

& partant on croiroit qu'au probleme proposé, qui aura conduit à cette équation, ne satisfissent qu'une infinité de paraboles, contenues dans l'équation $y = \frac{xx - aa - cc}{2c}$, selon les différentes valeurs de c. Et puisqu'on a trouvé une infinité de paraboles, on doutera d'autant moins, qu'on ne soit arrivé à une solution complete. Cependant nous venons de voir qu'au même probleme satisfait aussi le cercle contenu dans l'équation $xx + yy = aa$.

XXXVI. J'ai rencontré quelques autres cas de cette espece dans mon Traité du mouvement, où j'ai déjà remarqué ce même paradoxe, qu'une équation différentielle renferme quelquefois des solutions, qui ne sont plus comprises dans l'équation intégrée : j'y ai aussi donné une régle sûre, par le moyen de laquelle on peut trouver ces solutions contenues dans les équations différentielles, qu'on ne sauroit plus tirer de l'équation intégrée. Cependant, comme je n'y ai pas fait sentir assés evidemment l'importance de ce paradoxe, on pourroit croire que c'est quelque bizarrerie dans des problemes mecaniques, qui n'auroit plus lieu dans les problemes de Geometrie ; ou que ce ne seroit pas un reproche, qu'on pourroit faire directement à l'Analyse même.

XXXVII. Pour l'exemple que je viens d'alléguer ici, comme il est formé à fantaisie, on pourroit aussi douter, si ce cas se rencontre jamais dans la solution d'un probleme réel. Mais les mêmes exemples, que j'ai rapportés pour éclaircir le premier parodoxe, serviront aussi à éclaircir celui-ci. Car le premier probleme demandant une

une courbe telle, que si l'on mene d'un point donné sur toutes ses tangentes des lignes perpendiculaires, toutes ses perpendiculaires soient égales entr'elles; ce probleme, dis-je, étant proposé, on voit d'abord qu'un cercle décrit du point donné comme du centre avec un rayon égal à la droite, à laquelle toutes les perpendiculaires mentionnées doivent être égales, satisfera au probleme.

XXXVIII. Cependant, ayant été conduit à cette équation différentielle :

$$aady - xxdy + xydx = adx\,\sqrt{(xx + yy - aa)}$$

où les variables x & y sont mêlées entr'elles, on a vû que par le moyen de cette substitution $y = u\sqrt{(aa - xx)}$ elle se change en cette séparée,

$$\frac{du}{\sqrt{(uu - 1)}} = \frac{adx}{aa - xx}$$

dont l'intégrale prise dans toute son étendue étoit

$$u + \sqrt{(uu - 1)} = n\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$$

d'où j'ai tiré cette équation :

$$y = \frac{n}{2}(a + x) + \frac{1}{2n}(a - x)$$

laquelle ne renferme que des lignes droites, de sorte que le cercle semble à cette heure entierement exclus de la solution du problème proposé.

XXXIX. Il en est de même du problème second, qui est résolu à ce que nous avons vû par une ellipse exprimée par cette équation $y = \frac{c}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; ce qui est aussi clair par les propriétés connues de l'ellipse. Or ayant trouvé cette équation différentielle :

$$\left(y - \frac{xdy}{dx}\right)\left(y - \frac{xdy}{dx} + \frac{2ady}{dx}\right) = cc$$

 nous

nous en tirerons par l'extraction de racine :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a - x)y + \sqrt{[aayy - cc(2ax - xx)]}}{2ax - xx}$$

$$(2ax - xx)dy - (a - x)ydx = dx\sqrt{(aayy - cc[2ax - xx)]}$$

Or il est évident que l'équation $aayy - cc(2ax - xx) = 0$ satisfait à cette formule, car on aura de là $y = \frac{c}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$, & partant en différentiant leurs logarithmes :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx(a - x)}{2ax - xx}, \text{ ou } (2ax - xx)dy - (a - x)ydx = 0,$$

de sorte que dans ce cas l'un & l'autre membre de l'équation différentielle évanouït.

XL. Mais, si nous traitons cette équation différentielle selon la méthode ordinaire, & que nous posions $y = u\sqrt{(2ax - xx)}$, pour avoir

$$\sqrt{(aayy - cc[2ax - xx)]} = \sqrt{(2ax - xx)}(aauu - cc)$$

$$\& \quad dy = du\sqrt{(2ax - xx)} + \frac{u(a - x)dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

ces valeurs substituées changeront notre équation en cette forme :

$$du(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + u(a - x)dx\sqrt{(2ax - xx)} - u(a - x)dx\sqrt{(2ax - xx)} = dx\sqrt{(2ax - xx)}(aauu - cc)$$

qui se réduit maintenant à cette séparée,

$$\frac{du}{\sqrt{(aauu - cc)}} = \frac{dx}{2ax - xx} \quad \text{ou} \quad \frac{adu}{\sqrt{(aauu - cc)}} = \frac{adx}{2ax - xx}$$

donc l'intégrale prise généralement est

$$l\frac{au + \sqrt{(aauu - cc)}}{b} = \frac{1}{2}l\frac{x}{2a - x}$$

ou

ou bien

$$au + \sqrt{(aauu - cc)} = b\sqrt{\frac{x}{2a - x}} = \sqrt{\frac{bx}{(2ax - xx)}}.$$

XLI. De là on trouvera aiſément la valeur de u, qui ſera :

$$u = \frac{cc\sqrt{(2ax - xx)}}{2bx} + \frac{bx}{2\sqrt{(2ax - xx)}}$$

& puiſque $y = u\sqrt{(2ax - xx)}$, on obtiendra :

$$y = \frac{cc(2ax - xx)}{2bx} + \frac{bx}{2} = \frac{acc}{b} + \frac{(bb - cc)x}{2b}$$

& il eſt évident que cette équation intégrale, quelque générale qu'elle ſoit, à cauſe de la conſtante indéfinie b, ne renferme pas l'ellipſe déjà trouvée. Ce même accident aura auſſi lieu, dans les deux autres problèmes rapportés, lorſqu'on traitera les équations différentielles trouvées par la méthode ordinaire en cherchant ſon intégrale ; où l'ellipſe qui en fournit une belle ſolution, ne ſera plus compriſe.

XLII. Mais voici la régle générale, par laquelle on peut aiſément trouver ces cas de l'intégrale d'une équation différentielle propoſée, qui échapent à l'intégration ordinaire. Soit z une fonction quelconque des deux variables x & y, & Z une fonction quelconque de z. Soient de plus P, Q, V, auſſi des fonctions quelconques des variables x & y, & ſuppoſons qu'on ſoit parvenu à cette équation différentielle

$$V\,dz = Z(P\,dx + Q\,dy)$$

& il eſt clair, que la valeur $Z = o$ ſatisfait à cette équation : car de là on tirera $z =$ Conſt. & partant $dz = o$, de ſorte que dans le cas $Z = o$ les deux membres de l'équation propoſée évanouïſſent.

XLII. Par le moyen de cette régle on trouvera aiſément l'ellipſe, qui contient une ſolution du ſecond problème ; car étant parvenu à cette

cette équation différentielle :

$$\frac{du}{\sqrt{(aauu-cc)}} = \frac{dx}{2ax-xx} \text{ ou } du(2ax-xx) = dx\sqrt{(aauu-cc)}$$

prenons u pour z, & sa fonction $\sqrt{(aauu - cc)}$ pour Z, & l'équation proposée sera remplie par l'égalité $Z = 0$, ou $aauu - cc = 0$ d'où l'on tire $u = \frac{c}{a}$ & partant $y = \frac{c}{a} \sqrt{(2ax - xx)}$, qui est l'équation pour l'ellipse en question, qui se trouve exclue de l'équation intégrée.

XLIV. Il est ici à remarquer, que ces mêmes cas inaccessibles à l'intégration ordinaire, sont précisément ceux, qu'une différentiation réiterée nous a fournis dans les éclaircissemens du premier paradoxe. Et pour peu qu'on y réfléchisse, on s'apercevra que cet accord n'arrive pas par quelque hazard, & on pourra prononcer en général, que toutes les fois qu'une équation différentielle, étant encore différentiée, conduit immédiatement à une équation finie, cette équation finie ne sauroit jamais être trouvée par la voye ordinaire de l'intégration ; mais que, pour la trouver, il faut appliquer la régle que je viens d'exposer. De là on voit donc que les deux paradoxes expliqués sont tellement liés ensemble, que l'un renferme necéssairement l'autre.

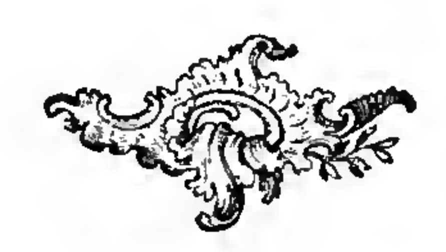
XLV. La régle donc, suivant laquelle on juge ordinairement, si une équation différentielle est intégrée dans toutes son étendue, ou non, n'est pas générale. On croit communément, que lorsqu'on a intégré en sorte une équation différentielle, que l'équation intégrale contient une constante indéfinie, qui ne se trouve pas dans la différentielle, alors l'équation intégrale soit complette, ou de la même étendue que la différentielle. Mais nous voyons par les exemples rapportés que, quoique les équations trouvées par l'intégration contiennent une telle constante, qui semble les rendre générales, les équations différentielles renferment pourtant une solution, qui n'est pas comprise dans

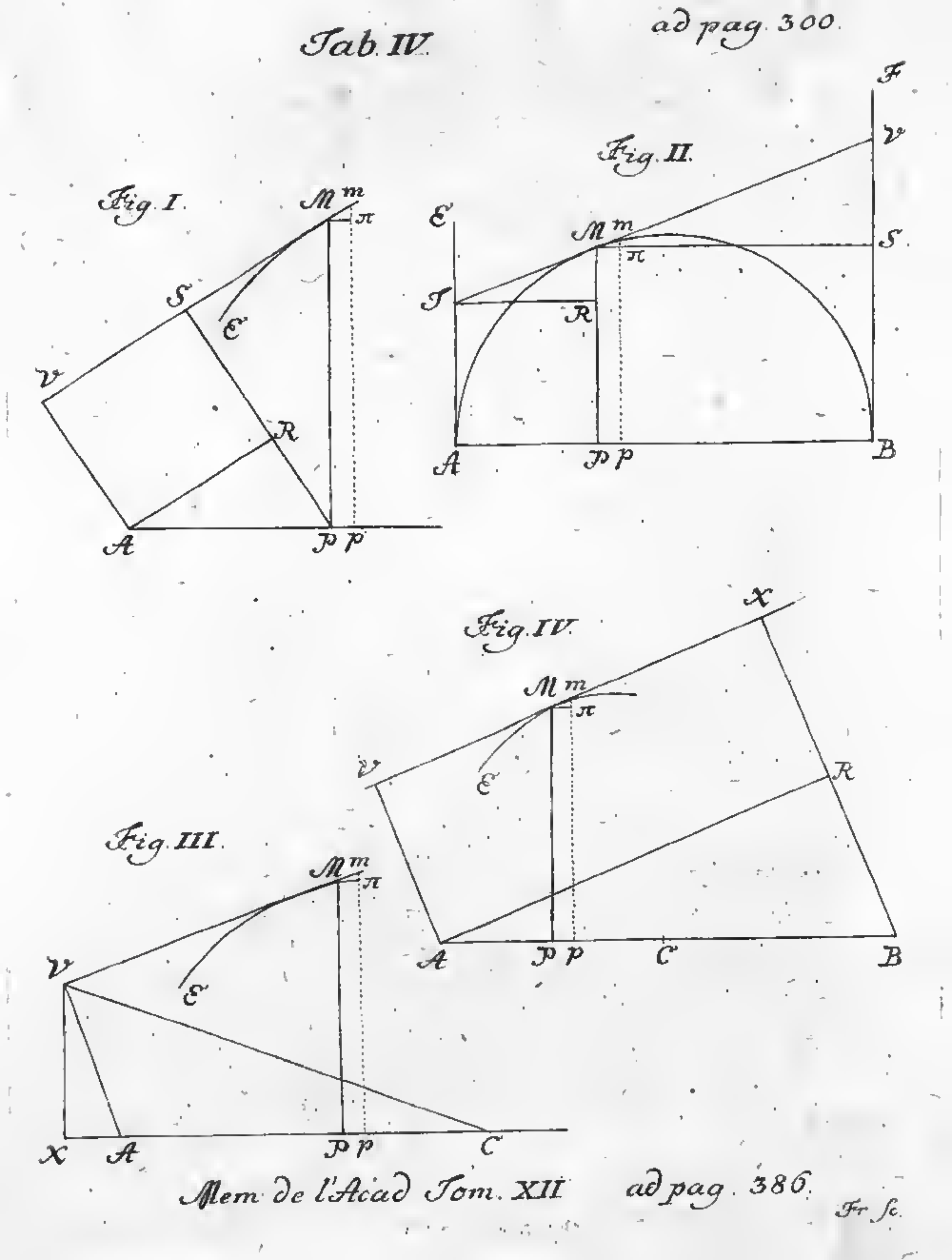
dans l'intégrale. Cette circonſtance ſur le critere des équations intégrales complettes nous pourroit fournir un troiſième parodoxe, s'il n'étoit pas déjà ſi étroitement lié avec le précédent.

XLVI. Il peut donc ſouvent arriver, qu'il eſt même abſolument impoſſible d'intégrer, ou même de ſéparer une équation différentielle propoſée, & dont on peut néanmoins par la régle donnée trouver une équation finie qui ſatisfait à la queſtion. Ainſi, ſi l'on étoit parvenu dans la ſolution d'un probleme à une telle équation

$$aa(aa-xx)dy+aaxydx=(aa-xx)(ydx-xdy)\sqrt{(yy+xx-aa)}$$

dont on entreprendroit inutilement l'intégration, on ſeroit pourtant ſûr que cette équation finie $yy+xx=aa$ y eſt compriſe. Car, poſant $yy+xx-aa=0$, tant l'un que l'autre membre de l'équation évanouït : ce qui devient plus clair lorsqu'on met $y=z\sqrt{(aa-xx)}$, car alors l'équation prendra cette forme: $aadz=(ydx-xdy)\sqrt{(zz-1)}$: & poſant $Z=\sqrt{(zz-1)}$ on aura par la régle donnée $\sqrt{(zz-1)}=0$, ou $z=1$, & partant $yy+xx=aa$,




Tab. IV.
ad pag. 300.
Fig. I.
M
m
π
S
E
V
R
A
P
p
Fig. II.
F
V
E
M
m
S
π
T
R
A
P
p
B
Fig. IV.
X
M
m
π
V
E
R
A
P
p
C
B
Fig. III.
M
m
π
V
E
X
A
P
p
C
Mem. de l'Acad. Tom. XII
ad pag. 386.
Fr. sc.